4-/ On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur **IN** par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a-)Montrer que $1 - t^2 + t^4 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

$$1 - t^2 + t^4 + \ldots + (-1)^n \cdot t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (t^2)^k - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= (-t^2)^0 \cdot \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= - \frac{(-1)^{n+1} \cdot (t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

$(-1)^{n+1} = (-1)^n \cdot (-1)$